



## TORSION SIMPLE

### I- HYPOTHÈSES : (Figure 24)

**Le solide est idéal** : matériau homogène, isotrope, poutre rectiligne de section constante et circulaire.

**Les actions extérieures** dans les sections extrêmes sont modélisables par deux moments opposés, portés par la ligne moyenne. La poutre est donc soumise à deux torseurs couples.

$$\{\tau_{i/l}\}_A = \{\vec{0} | \vec{M}_A\}_A \text{ et } \{\tau_{i/l}\}_B = \{\vec{0} | \vec{M}_B\}_B$$

### II- DÉFINITION : (Figure 25)

Une poutre est sollicitée à la torsion simple si le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) sur la partie gauche (I) de la poutre peut se réduire en **G**, barycentre de la section droite (S) à un moment perpendiculaire à (S), tel que :

$$\{Coh_{II/I}\}_G = \{\vec{0} | \vec{M}_t\}_G \text{ dans } R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

avec :  $N = 0; T_y = 0; T_z = 0$

$$M_t \neq 0; M_{jGy} = 0; M_{jGz} = 0$$

$$\text{et } \{Coh_{II/I}\}_G = -\{Action \text{ ext. à gauche } / I\}_G$$

$$\{Coh_{II/I}\}_G = +\{Action \text{ ext. à droite } / II\}_G$$

donc :  $\vec{R} = \vec{0} \text{ et } \vec{M}_t = -\vec{M}_A$

### III- ÉTUDE DES DÉFORMATIONS : (angle unitaire de torsion) (Figure 26)

$$\theta = \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha_1}{\ell_{1,0}} ; \text{ Si } \alpha > 0 \Rightarrow \theta > 0$$

$\theta$  : Angle unitaire de torsion en (rad/mm)

$\alpha$  : Angle de torsion en (rad).

### IV- CONTRAINTE TANGENTIELLE DE TORSION : (Figure 27)

$$\tau_M = G \cdot \theta \cdot \rho$$

avec :

$\tau_M$  : Contrainte tangentielle due à la torsion en un point M en (MPa)

$G$  : Module d'élasticité transversale (ou de Coulomb) en (MPa)

$\theta$  : Angle de torsion unitaire en (rad/mm)

$\rho$  : Distance de M au centre de la section en (mm).

**Remarque** : La contrainte de torsion est maximale si M est sur la surface du solide c'est-à-dire,  $\rho = R$

$$\tau_{max} = G \cdot \theta \cdot R$$

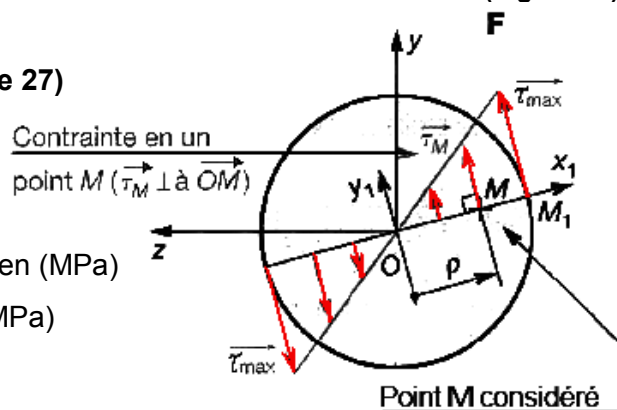
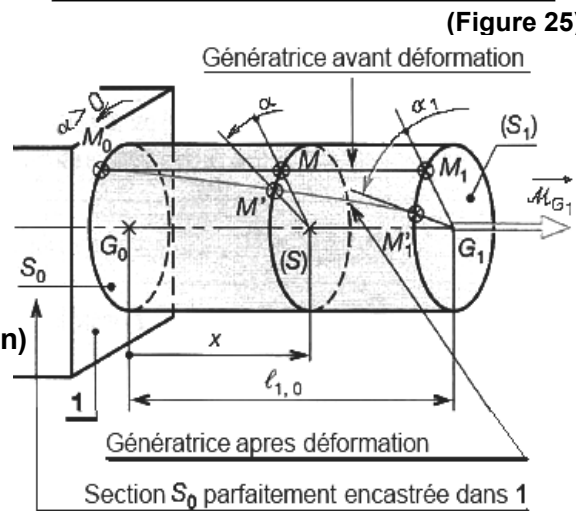
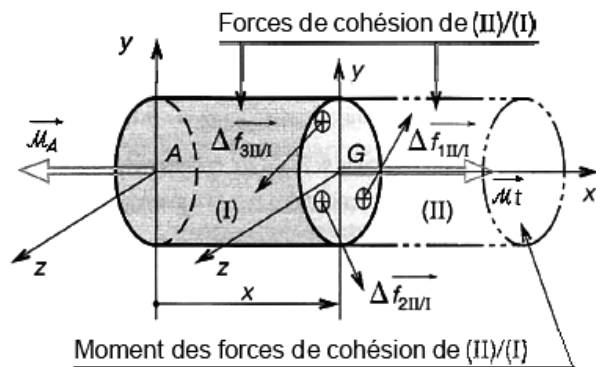
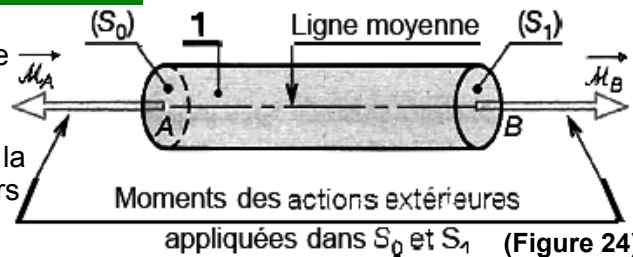
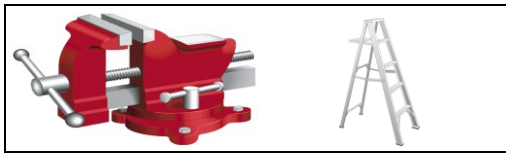


Diagramme de représentation des contraintes de torsion

(Figure 27)

FONCTION CONVERTIR L'ÉNERGIE : Aspect Physique



V- MOMENT QUADRATIQUE D'UNE SURFACE PLANE PAR RAPPORT A UN AXE DE SON PLAN:

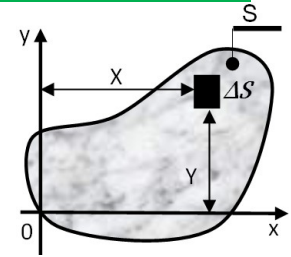
Pour les moments quadratiques faite attention aux axes !!!

**Définition: (Figure 28)**

Le moment quadratique ou d'inertie de la surface (S) est défini par:

$$\text{Proj/ox} : \Rightarrow I_{ox} = \sum_{(s)} y^2 \cdot \Delta S = \int_{(s)} y^2 \cdot dS \quad (\text{en } mm^4)$$

$$\text{Proj/oy} : \Rightarrow I_{oy} = \sum_{(s)} x^2 \cdot \Delta S = \int_{(s)} x^2 \cdot dS \quad (\text{en } mm^4)$$



(Figure 28)

⚡ **Remarque:** Les moments quadratiques interviennent dans le calcul de la contrainte de torsion et de la flexion.

**Exemple1:** Calculer le moment quadratique ( $I_{ox}$  et  $I_{oy}$ ) et ( $I_{Gx}$  et  $I_{Gy}$ ) de la surface (S) définie par la figure 29.

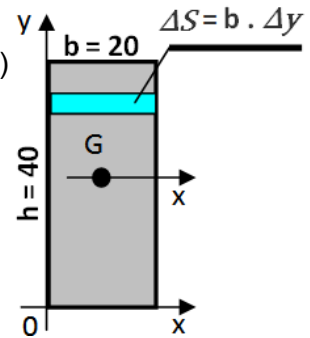
**Réponse :**

$$\text{Notons } I_{ox} = \sum_{(s)} y^2 \cdot \Delta S = \sum_{(s)} y^2 \cdot b \cdot \Delta y = b \sum_{y=0}^{y=h} y^2 \cdot \Delta y = b \int_{y=0}^{y=h} y^2 \cdot dy$$

$$I_{ox} = b \cdot \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^h = b \cdot \left[ \frac{h^3 - 0}{3} \right] \text{ soit } I_{ox} = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

$$\text{On trouverait de la même façon: } I_{oy} = \frac{h \cdot b^3}{3}$$

$$\text{Et } I_{Gx} = b \sum_{y=-\frac{h}{2}}^{y=+\frac{h}{2}} y^2 \cdot \Delta y = b \int_{y=-\frac{h}{2}}^{y=+\frac{h}{2}} y^2 dy \quad \text{alors: } I_{Gx} = \frac{bh^3}{12} \text{ et } I_{Gy} = \frac{hb^3}{12}$$



(Figure 29)

**Exemple2:** Calculer le moment quadratique ( $I_{ox}$  et  $I_{oy}$ ) de la surface (S) définie par la figure 30.

**Réponse :** (méthode 1)

Décomposons la surface (S) en deux surface ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) telles que:

$S = S_1 + S_2$  alors  $I_{ox} = I_{1ox} + I_{2ox}$  et  $I_{oy} = I_{1oy} + I_{2oy}$

$$* I_{1ox} = \int_S y_1^2 ds_1 = \int_S y_1^2 dx_1 \cdot dy_1 = \int_0^{20} dx_1 \cdot \int_0^{80} y_1^2 dy_1$$

$$I_{1ox} = [x_1]_0^{20} \cdot \left[ \frac{y_1^3}{3} \right]_0^{80} = (20 - 0) \cdot \left( \frac{80^3 - 0}{3} \right)$$

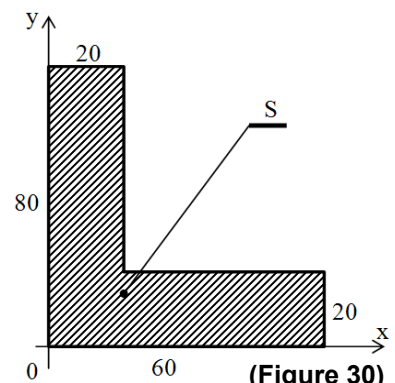
$$I_{1ox} = 20 \cdot \frac{512000}{3} = 341,33 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$* I_{2ox} = \int_S y_2^2 ds_2 = \int_S y_2^2 dx_2 \cdot dy_2 = \int_{20}^{60} dx_2 \cdot \int_0^{20} y_2^2 dy_2 \Rightarrow I_{2ox} = [x_2]_{20}^{60} \cdot \left[ \frac{y_2^3}{3} \right]_0^{20} = (60 - 20) \cdot \left( \frac{20^3 - 0^3}{3} \right)$$

$$I_{2ox} = 40 \cdot \frac{8000}{3} = 10,66 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \quad \text{D'OÙ: } I_{ox} = 351,99 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$* I_{1oy} = \int_S x_1^2 ds_1 = \int_S x_1^2 dx_1 \cdot dy_1 = \int_0^{80} dy_1 \cdot \int_0^{20} x_1^2 dx_1 \Rightarrow I_{1oy} = [y_1]_0^{80} \cdot \left[ \frac{x_1^3}{3} \right]_0^{20} = (80 - 0) \cdot \left( \frac{20^3 - 0}{3} \right)$$

$$I_{1oy} = 80 \cdot \frac{8000}{3} = 21,33 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \quad \text{D'OÙ: } I_{oy} = 159,99 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$



(Figure 30)

FONCTION CONVERTIR L'ÉNERGIE : Aspect Physique



**VI- MOMENT QUADRATIQUE D'UNE SURFACE PLANE PAR RAPPORT A UN POINT:**

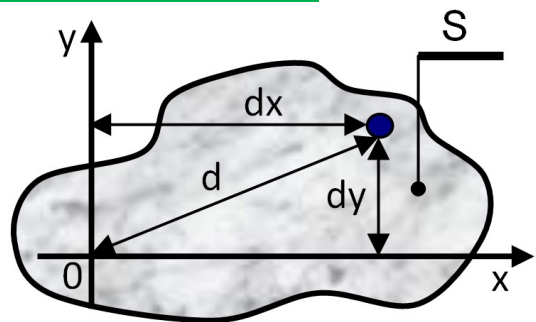
(Moment quadratique polaire) (Figure 31)

Le moment quadratique polaire est défini par:

$$I_0 = \sum_s d^2 \Delta S = \int_s d^2 dS \text{ en } (mm^4)$$

or  $d^2 = d_x^2 + d_y^2 \Rightarrow I_0 = \sum_s (d_x^2 + d_y^2) \Delta S = \int_s (d_x^2 + d_y^2) dS$

donc :  $I_0 = I_{0x} + I_{0y}$



(Figure 31)

**Exemple :** cas d'une surface circulaire de rayon R = D/2  
Calculons le moment quadratique polaire de l'élément de surface ΔS, ΔS est la couronne de rayon moyen " r " et de largeur Δr (Δr est très petit).

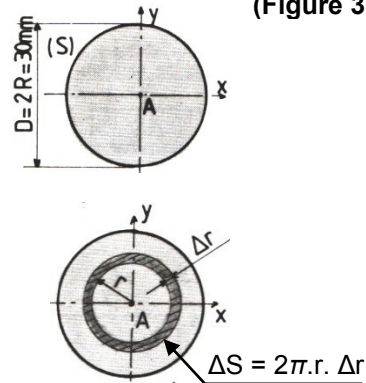
$\Delta I_A = r^2 \cdot \Delta S = 2\pi \cdot r^3 \cdot \Delta r$

Pour la surface (S) complète le moment quadratique polaire par rapport au point A est :  $I_A = \sum \Delta I_A = \sum 2\pi \cdot r^3 \cdot \Delta r$

" r " varie de 0 à R,  $I_A$  peut s'exprimer à l'aide de l'intégrale suivante :

$$I_A = \int_0^R 2\pi \cdot r^3 \cdot dr = 2\pi \cdot \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi 30^4}{32} = 79521,56 \text{ mm}^4$$

Par symétrie  $I_x = I_y$ , il en résulte  $I_x = I_y = I_A/2$



**VII- MOMENTS QUADRATIQUES USUELS:**

$I_{Gx}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$
$I_{Gy}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$
$I_G$	$\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$

**IX- THEOREME DE HUYGNES ET CHNGEMENT D'AXE: (Figure 32)**

Le moment quadratique d'une surface (S) par rapport à un axe (ox) quelconque de son plan est égal au moment quadratique de cette surface par rapport à l'axe (GX) passant par son centre de gravité et parallèle à (ox), plus le produit de l'aire de cette surface par le carré de la distance des deux axes (ox) et (GX).

X et Y passent par le centre de gravité G ou barycentre de la surface (S). x est parallèle à X et y à Y, ; dx et dy sont les distances entre les axes et S l'aire de la surface (S).

⚡ Remarque:

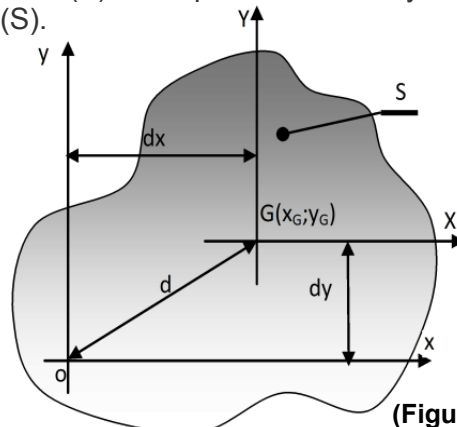
$$d^2 = d_x^2 + d_y^2$$

$$I_{0x} = I_{Gx} + Sd_y^2$$

$$I_{0y} = I_{Gy} + Sd_x^2$$

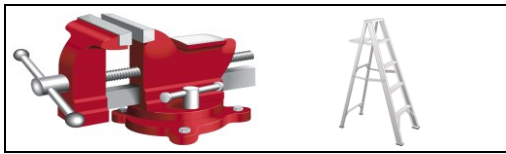
$$I_0 = I_G + Sd^2$$

$$I_{0xy} = I_{G_x G_y} + Sd_x d_y$$



(Figure 32)

FONCTION CONVERTIR L'ÉNERGIE : Aspect Physique



**IX- ÉQUATION DE DÉFORMATION :**

C'est la relation entre  $M_t$  et  $\theta$  :

$$M_t = G \cdot \theta \cdot I_0 \implies \alpha = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_0}$$

Avec : -  $M_t$  : moment de torsion en (N.m)

$G$  : Module d'élasticité transversale (ou de Coulomb) en (MPa)

$\theta$  : Angle de torsion unitaire en (rad/mm)

$I_0$  : moment quadratique polaire de S ( $\text{mm}^4$ ).

**X- CONTRAINTE DE TORSION :**

C'est la relation entre  $M_t$  et  $\tau$

$$\tau_M = \frac{M_t}{I_0} \cdot \rho \quad \text{Et la contrainte Maxi} \quad \tau_{M_{\max i}} = \frac{M_{t_{\max i}}}{I_0 / \nu}$$

Avec : -  $\tau_M$  : contrainte tangentielle due à la torsion en un point M en (MPa)

-  $\tau_{M_{\max i}}$  : contrainte tangentielle maxi en (MPa)

$M_t$  : moment de torsion en (N.m)

$M_{t_{\max i}}$  : moment de torsion maxi en (N.m)

$I_0$  : moment quadratique polaire de S ( $\text{mm}^4$ ).

$\nu = R = \rho_{\max i}$  : Distance de M au centre de la section en (mm).

**XI- CONDITION DE RESISTANCE :**

$$\tau_{M_{\max i}} = \frac{M_{t_{\max i}}}{I_0 / \nu} \leq R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$$

- **Rpg** : résistance pratique au glissement en (MPa)

Avec : - **Reg** : résistance élastique au glissement en (MPa)

- **s** : coefficient de sécurité

**XII- CONDITION DE RIGIDITE :**

$$|\theta| = \frac{|M_t|}{G \cdot I_0} \leq \theta_{\lim}$$

Avec :  $\theta_{\lim}$  : angle unitaire limite de torsion en (rad/mm)

**XIII- CONCENTRATION DE CONTRAINTES :**

Lorsque les arbres étudiés présentent de brusques variation de section (gorge ; épaulement, trou...) les formules précédentes ne s'appliquent plus.

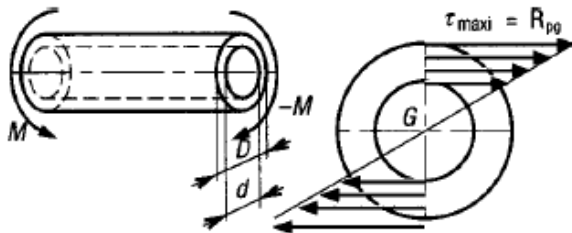
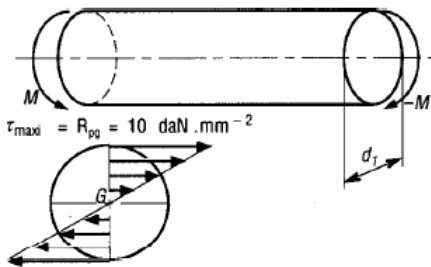
On dit qu'il y a concentration de contraintes.

$$|\tau_{\text{eff max i}}| = k_t \cdot |\tau_{th}| \leq R_{pg}$$

**Comparaison entre arbre plein et arbre creux :**

Soit deux arbres de transmission construits à partir du même acier,  $G=8000 \text{ daN/mm}^2$ . Le premier est plein (diamètre  $d$ ); le second est creux (diamètre extérieur  $D$ , diamètre intérieur  $d = 0,8D$ ).

Le couple à transmettre est de 200 Nm ; la résistance pratique au cisaillement adoptée pour les deux cas est de  $10 \text{ daN/mm}^2$ . Déterminons les dimensions optimales des deux arbres et comparons les poids respectifs des deux constructions.



$$\tau_{\max i} = \frac{M_t}{I_{o1} / \nu_1} \leq 10 \text{ daN/mm}^2 \quad \text{et} \quad \frac{I_{o1}}{\nu_1} = \frac{\pi d_1^3}{16}$$

$$\tau_{\max i} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 16}{\pi d_1^3} \leq 10 \quad \text{d'où} \quad d_1^3 \geq \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 16}{10\pi}$$

Alors  $d_1 \geq 21,67 \text{ mm}$

$$S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = 369,05 \text{ mm}^2$$

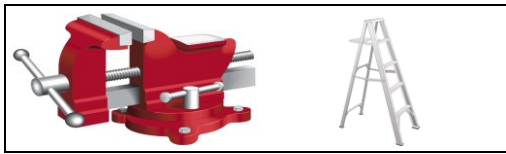
$$\tau_{\max i} = \frac{M_t}{I_{o2} / \nu_2} \leq 10 \text{ daN/mm}^2 \quad \text{et} \quad I_{o2} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32} [1 - (0,8)^4]$$

$$\frac{I_{o2}}{\nu_2} = \frac{\pi D_1^3}{16} [1 - (0,8)^4] = 0,59 \frac{\pi D_1^3}{16} \implies \tau_{\max i} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 16}{0,59 \cdot \pi D^3} \leq 10$$

$$D^3 \geq \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 16}{0,59 \cdot 10\pi} \quad \text{alors} \quad D \geq 25,83 \text{ mm} \quad \text{et} \quad d = 20,67$$

$$S_2 = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 188,78 \text{ mm}^2$$

Remarquons que le rapport "r" des poids des deux arbres est égal au rapport des sections. Pour cet exemple, le poids de l'arbre (2) est, à résistance égale, deux fois plus léger que l'arbre (1). Cette solution est à envisager pour des constructions où la légèreté est recherchée.



**Exemple : tige de tournevis.**

Le tronçon AB de la tige du tournevis proposé (longueur 200 mm, diamètre 7 mm) est soumis à une sollicitation de torsion. Le couple de torsion supporté par la tige est :  $M_B = -M_A = F \cdot a = 24 \text{ Nm}$ .

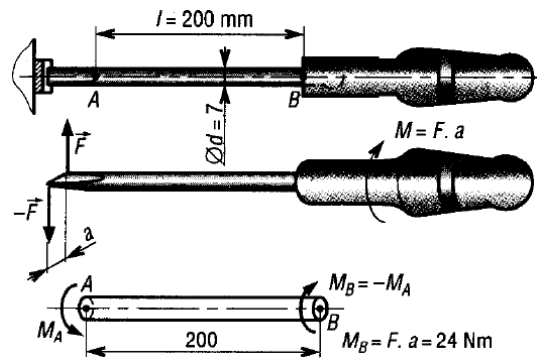
- 1- si l'angle de torsion  $\alpha_{AB}$  mesuré entre A et B est égal à  $14,6^\circ$ ; **déterminons**  $\theta$ .
- 2-  $G = 80 \text{ GPa}$  ;  $\theta = 73^\circ/\text{m}$ . **Déterminons** la contrainte de cisaillement maximale dans la tige.
- 3- **déterminons** l'angle unitaire de torsion.
- 4- si, on impose une contrainte admissible au cisaillement de  $200 \text{ MPa}$ , **déterminons** la valeur minimale du diamètre  $d$  lorsque  $M_{\text{tmaxi}} = 24 \text{ Nm}$ .

**Rep :**

1-  $\theta = \frac{\alpha_{AB}}{L_{AB}} = \frac{14,6^\circ}{200 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{\pi}{180} = 1,274 \text{ rad/m}$

2-  $\tau_{\text{maxi}} = G \cdot \theta \cdot \rho_{\text{maxi}} = 80 \cdot 10^3 \cdot 0,001274 \cdot 3,5 = 356,74 \text{ MPa}$

3-  $\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_o} = \frac{24 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 7^4}{32}} = 0,001274 \text{ rad/mm}$



4-  $\tau_{\text{maxi}} = \frac{M_{\text{tmaxi}}}{I_o} = \frac{24 \cdot 10^3}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} \leq \tau_{\text{adm}} = 200 \text{ N/mm}^2$   
D'où :  $d^3 \geq \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 16}{\pi \cdot 200}$  alors  $d \geq 8,5 \text{ mm}$

**Remarque :**

Si, au cours de l'étude, un élève repère ce qui lui semble être une erreur ou fautes de frappe, il le signale au professeur de la matière !!!

FONCTION CONVERTIR L'ÉNERGIE : Aspect Physique